第 3 講　複素数と方程式

PART1　複素数と式の値，解と係数の関係

1　［1］　$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^2-2x+4，$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ の値を求めよ。

［2］　2 次方程式 $2x^2-8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(i)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

(ii)　$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

Point Pickup

［1］　多項式の式の値を求める際に，割り算の結果を用いる等により，値を求めたい式の次数を下げることで，計算を簡単にすることができる。

［2］　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ である。

また，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β は 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の 2 つの解である。

第 3 講　PART1　確認問題

1 $x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，

x^2-4x+7，

$x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56$

の値を求めよ。

$x^2-4x+7=$ [ア]

$x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56$

$=$ [イ] $+$ [ウ] $\sqrt{[エ]}\,i$

2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とする。

2 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=$ [オ]

3 $\alpha+1$，$\beta+1$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

$2x^2-$ [カ] $x+$ [キ] $=0$

第 3 講　複素数と方程式

PART1　複素数と式の値，解と係数の関係

1　[1]　$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，x^2-2x+4，$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ の値を求めよ。

[2]　2 次方程式 $2x^2-8x-3=0$ の 2 つの解を α，β とする。

(i)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ。

(ii)　$\alpha-3$，$\beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

[1]　$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき

$$x^2-2x+4=(1+\sqrt{3}\,i)^2-2(1+\sqrt{3}\,i)+4=1+2\sqrt{3}\,i-3-2-2\sqrt{3}\,i+4=0$$

$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ を x^2-2x+4 で割ると

商は　x^3+3x^2+3x-5，余りは　$-21x+21$

よって　$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2-2x+4)(x^3+3x^2+3x-5)-21x+21$ ……①

$x=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，$x^2-2x+4=0$ であるから，①より

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=-21x+21=-21(1+\sqrt{3}\,i)+21=-21\sqrt{3}\,i$$

[2]　解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-8}{2}=4,\quad \alpha\beta=\frac{-3}{2}=-\frac{3}{2}$$

(i)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{4}{-\dfrac{3}{2}}=-\dfrac{8}{3}$

(ii)　$(\alpha-3)+(\beta-3)=\alpha+\beta-6=4-6=-2$

$$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=-\frac{3}{2}-12+9=-\frac{9}{2}$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは $x^2+2x-\dfrac{9}{2}=0$　すなわち　$2x^2+4x-9=0$

第３講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：0，イ：3，ウ：5，エ：3

[解説]

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき

$$
\begin{aligned}
&x^2-4x+7\\
&=(2+\sqrt{3}\,i)^2-4(2+\sqrt{3}\,i)+7\\
&=4+4\sqrt{3}\,i-3-8-4\sqrt{3}\,i+7\\
&=0
\end{aligned}
$$

$x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56$ を x^2-4x+7 で割ると

商は　x^3-x^2+x+9，　余りは　$5x-7$ [A]

$$
\begin{array}{r}
x^3-\ \ x^2+\ \ \ x\ +9\\
x^2-4x+7\,\big)\,x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56\\
x^5-4x^4+\ \ 7x^3\\
\hline
-\ x^4+\ 5x^3-2x^2\\
-\ x^4+\ 4x^3-7x^2\\
\hline
x^3+5x^2-24x\\
x^3-4x^2+\ \ 7x\\
\hline
9x^2-31x+56\\
9x^2-36x+63\\
\hline
5x-\ \ 7
\end{array}
$$

[A]　多項式 $P(x)$ を $A(x)$ で割ったとき，商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると
　$P(x)=A(x)Q(x)+R(x)$
（$R(x)$ の次数）$<$（$A(x)$ の次数）
$A(\alpha)=0$ のとき　$P(\alpha)=R(\alpha)$
これを利用して，値を求めたい式の次数を下げる。

ゆえに

$$
\begin{aligned}
&x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56\\
&=\left(x^2-4x+7\right)\left(x^3-x^2+x+9\right)+5x-7 \quad \text{[A]}
\end{aligned}
$$

$x=2+\sqrt{3}\,i$ のとき，$x^2-4x+7=0$ であるから

$$
\begin{aligned}
&x^5-5x^4+12x^3-2x^2-24x+56\\
&=5x-7=5(2+\sqrt{3}\,i)-7=\mathbf{3+5\sqrt{3}\,i}
\end{aligned}
$$

2 **[正解]** オ：4

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$$ [B]

であるから

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2\div\frac{1}{2}=4$$

[B]　解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

3 **[正解]** カ：8，キ：7

[解説]

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$$

であるから

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=2+2=4$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=\frac{1}{2}+2+1=\frac{7}{2}$$

よって，求める 2 次方程式は

$$x^2-4x+\frac{7}{2}=0$$ [C]

すなわち

$$\mathbf{2x^2-8x+7=0}$$

[C]　$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$ のとき，α, β は 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の 2 つの解である。